

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN ALGEBRAICA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE GEOGEBRA

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF THE LIMIT OF AN ALGEBRAIC FUNCTION WITH HIGH SCHOOL STUDENTS THROUGH GEOGEBRA

Saúl Elizarraras Baena¹, Maricela Bonilla González² y Orlando Vázquez Pérez³

1.- Doctor en Ciencias de la Educación; Escuela Normal Superior de México; sauleliba@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-9623-3452>

2.- Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa; Escuela Normal Superior de México; marybog1804@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0008-4059-9114>

3.- Doctor en Ciencias de la Educación; Escuela Normal Superior de México keplermx74@gmail.com; <https://orcid.org/0009-0003-1973-3968>

Recibido: 07 de agosto de 2025

Aceptado: 22 de mayo de 2026

Resumen

El objetivo de esta investigación fue caracterizar la comprensión de estudiantes de tercer semestre de bachillerato general sobre el concepto y cálculo del límite de una función algebraica al utilizar los registros semióticos como la tabla, la gráfica y la expresión algebraica mediante el software de GeoGebra. El estudio tuvo un corte cualitativo (Eisner, 1998), enfoque etnográfico, cuya técnica fue la observación participante (Woods, 1987). Se utilizó el software libre de GeoGebra para calcular el área de polígonos regulares construidos de forma inscrita en circunferencias con radio constante. La movilización de los conocimientos previos del grupo estudiantil permitió el desarrollo de habilidades matemáticas como la generalización, la visualización y la imaginación espacial. El uso de GeoGebra para las distintas representaciones de los objetos matemáticos permitió que los estudiantes pudieran darles cierto sentido a los procedimientos algebraicos e incluso, que pudieran generalizar los tres tipos de casos que se pueden presentar al calcular el límite del cociente de dos funciones algebraicas cuando el valor de la variable independiente tiende a infinito.

Palabras clave: Comprensión, concepto, cálculo, límite, función algebraica.

Abstract

The objective of this research was to characterize third-semester high school students' understanding of the concept and calculation of the limit of an algebraic function using semiotic registers such as tables, graphs,

and algebraic expressions using GeoGebra software. The study had a qualitative approach (Eisner, 1998) and an ethnographic approach, using participant observation as a technique (Woods, 1987). The free GeoGebra software was used to calculate the area of regular polygons constructed inscribed in circles with constant radius. The mobilization of the students' prior knowledge allowed for the development of mathematical skills such as generalization, visualization, and spatial imagination. The use of GeoGebra for the different representations of mathematical objects allowed students to give some meaning to algebraic procedures and even to generalize the three types of cases that can arise when calculating the limit of the quotient of two algebraic functions when the value of the independent variable tends to infinity.

Key words: Understanding, concept, calculation, limit, algebraic function.

Planteamiento del problema

De manera frecuente, la enseñanza del cálculo de límite de funciones algebraicas se centra en el procedimiento formal y se descarta el desarrollo de nociones que le permitan a las (os) estudiantes comprender el concepto matemático de manera intuitiva, reflexiva y con sentido.

Al respecto, se han reportado estudios en los que se proporcionó un acercamiento intuitivo para la conceptualización de límite mediante razonamientos sencillos, ya que la solución se puede imaginar y visualizar (Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas; 2006); mientras que, en otros casos, las ideas intuitivas sobre los infinitesimales favorecen la conceptualización compleja de número real y continuidad (Valdivé y Garbin, 2008).

De esta manera, interesó contestar la pregunta siguiente: ¿de qué manera comprenden los estudiantes de tercer semestre de bachillerato general el concepto y cálculo del límite de una función algebraica al utilizar los registros semióticos de la información como la tabla, la gráfica y la expresión algebraica mediante el software de GeoGebra?

Marco teórico

De manera común, las (os) estudiantes cometen errores matemáticos cuando la enseñanza trabaja con temas algebraicos o de cualquier otra temática que pretenda el desarrollo del pensamiento matemático. En este sentido, Astolfi (2004) plantea que los errores deben permitir el progreso intelectual cuando se descarta su carácter sancionador; incluso, afirma que deben provocarse, ya que son una gran oportunidad para el aprendizaje, para ello se debe conjugar la lógica de los estudiantes con la lógica del saber.

Asimismo, Gigerenzer (2005) considera que una persona necesariamente debe cometer errores para sobrevivir en un mundo lleno de incertidumbre. También, señala que se requiere de un análisis ecológico que revele la existencia de buenos errores, para que, a su vez, permitan el estudio del funcionamiento del cerebro. De igual manera, puntualiza que la naturaleza de la memoria no es simplemente almacenar y recuperar, sino que debe hacer inferencias y reconstruir

el pasado desde el presente.

Duval (1998) propone tres tipos de registros de representación semiótica, a saber: tabular, gráfica y simbólico-algebraico; los cuales define como un sistema específico de producción de representaciones semióticas que pueden generar una conversión entre objetos diferentes con características en común. Para ello, la persona exterioriza y comunica las representaciones mentales (imágenes y concepciones) que puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre su asociación.

Ahora bien, Duval (2006) destaca dos tendencias para explicar la comprensión de los estudiantes desde la perspectiva de la Educación Matemática. Por un lado, aquella que hace referencia a las dificultades de comprensión a partir de los “errores conceptuales” y, por el otro, a partir de las “producciones” de los alumnos al resolver problemas de manera colaborativa, de tal manera que pongan en práctica la conversión y el tratamiento que permitan la transformación del procesamiento matemático mediante los registros de representación semiótica.

Duval (2006) considera que la conversión es un proceso cognitivo complejo, por lo que es el umbral de la comprensión de los estudiantes como actividad matemática que implica el uso obligado de las representaciones semióticas y el análisis de los objetos matemáticos respectivos.

Enfoque metodológico

Este estudio es de tipo cualitativo (Eisner, 1998), con enfoque metodológico en la Etnografía Educativa, cuya técnica fue la observación participante (Woods, 1997). Esto implicó que el docente realizara funciones tanto de enseñanza como de investigación.

La interacción del docente-investigador fue con un grupo de 42 estudiantes de bachillerato general dependiente de la Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de México conforme al Programa de Estudios 2023. Se grabaron en audio y se transcribieron las intervenciones tanto del docente como del grupo de estudiantes, con la finalidad de analizar su contenido a partir de los criterios de análisis que devinieron de los referentes teóricos.

Desarrollo y discusión

Una primera actividad que se solicitó a los estudiantes fue mediante el software de GeoGebra, construyeran polígonos regulares de forma inscrita en una circunferencia cuya medida del radio era constante a efecto de que pudieran darse cuenta de que a medida que aumenta el número de lados mayor es la aproximación al área del círculo. La intervención de la enseñanza se denota con la letra D; mientras que las participaciones del estudiantado son representadas con la letra En (n corresponde al número de lista) y G cuando contestaban la mayoría del grupo.

D: Vamos a apoyarnos con las indicaciones que se nos proporcionan, ¿qué

debemos hacer primero?

E₁₈: Que seleccionemos la herramienta punto del segundo icono y que tracemos un punto.

D: Bien, yo lo voy a hacer y quiero que observen. Si les surge alguna duda me pueden interrumpir. Ahora que tracé el punto, ¿qué debo hacer?

E₁₀: Seleccionar la herramienta Circunferencia, centro y radio, del sexto icono.

D: Vean, me voy al sexto icono y al desplegar las opciones, elijo la segunda opción (de arriba hacia abajo), en automático me solicita la medida del radio, voy a asignarle una medida de cinco y va a ser la misma siempre.

D: Bien, vean como se forma en automático la circunferencia. Ahora, ¿qué debemos hacer? [Nadie contesta] ¿Quién me ayuda a leer el paso siguiente?

E₁₁: Yo maestro. Ubica un punto cualquiera sobre la circunferencia y posteriormente, traza un ángulo, para ello deberás seleccionar la herramienta Angulo dada su amplitud que se encuentra en el octavo icono.

D: Observen por favor lo que voy a hacer. Aquí en el octavo icono, voy a seleccionar la segunda opción que es Ángulo dada su amplitud y es importante que primero seleccionemos el punto que está ubicado sobre la circunferencia y después, el del radio de la circunferencia. ¿Qué aparece en la pantalla?

E₄: Que escribamos la medida del ángulo. ¿Eso cómo es?

D: Primero, díganme ¿Cuánto mide el ángulo completo de la circunferencia?

E₅: Trescientos sesenta.

D: ¿Están de acuerdo con su compañera?

G: Sí profesor.

D: Si lo que quiero es construir un triángulo equilátero que esté inscrito dentro del círculo, ¿en cuánto se van a dividir los trescientos sesenta grados?

E₁₀: En ciento veinte porque son tres ángulos que tiene el triángulo.

D: Sí es ciento veinte, pero no pierdan de vista que el ángulo que nos interesa es el que se forma desde el centro de la circunferencia hacia los vértices del triángulo.

En la Figura 1, se muestra la construcción de ocho polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio igual a cinco unidades.

Una de las situaciones que debe ser expuesta es la curiosidad que manifestaron los estudiantes de manera espontánea cuando el docente los interrogó sobre la aproximación al área del círculo, a medida que aumentaban los lados del polígono regular. En los pasajes siguientes, se muestran las intervenciones que se generaron en la interacción del docente con el grupo de estudiantes.

D: Bien, ahora que ya terminaron, ¿qué me pueden decir sobre el área de los polígonos conforme aumenta el número de lados?

E₉: Es la misma, profesor.

D: ¿Qué opinan los demás?

E₆: Sí son la misma, porque quedan encimadas.

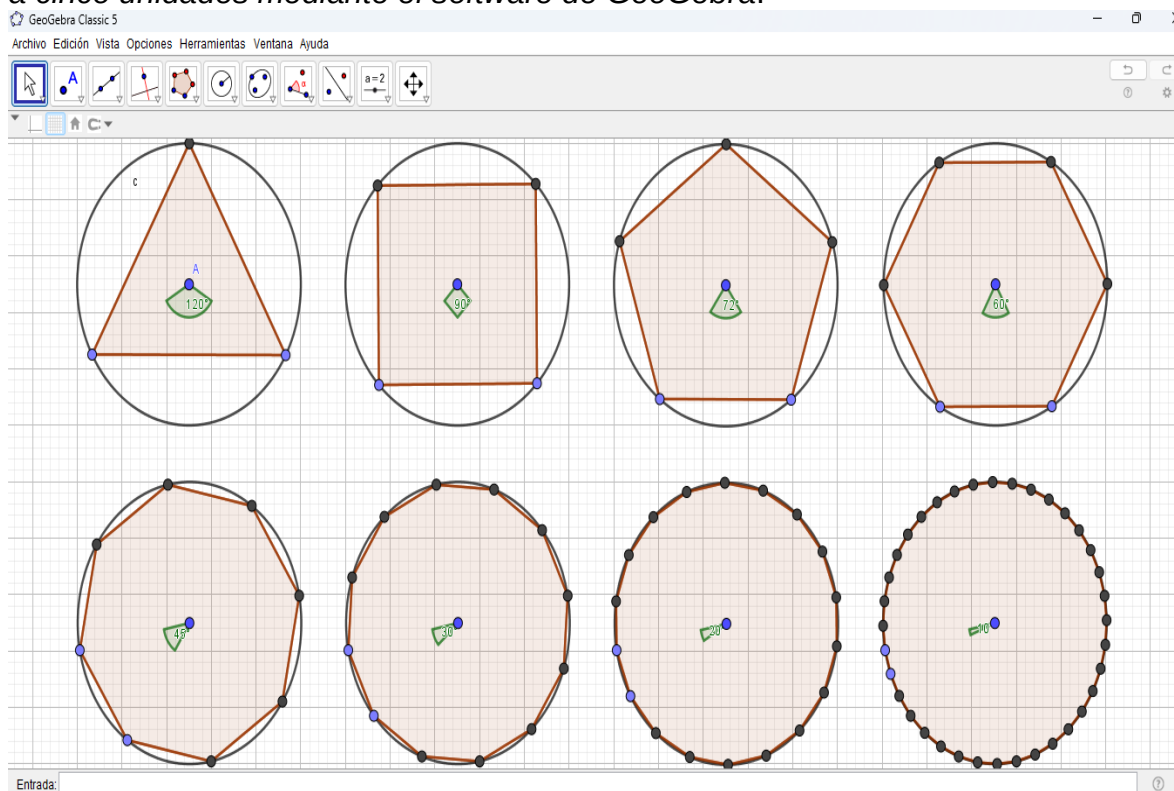
D: Fíjense lo que vamos a hacer, para ver si quedan encimadas o no. Vamos a ampliar la imagen y quiero que me digan que ocurre.

E₉: Ah, se alcanza a ver un hueco. Entonces, es casi igual.

D: ¿Y qué debemos hacer para que los polígonos regulares se aproximen cada vez más al área del círculo?

Figura 1.

Construcción de polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio igual a cinco unidades mediante el software de GeoGebra.



E₂₂: Construir un polígono de trescientos sesenta lados.

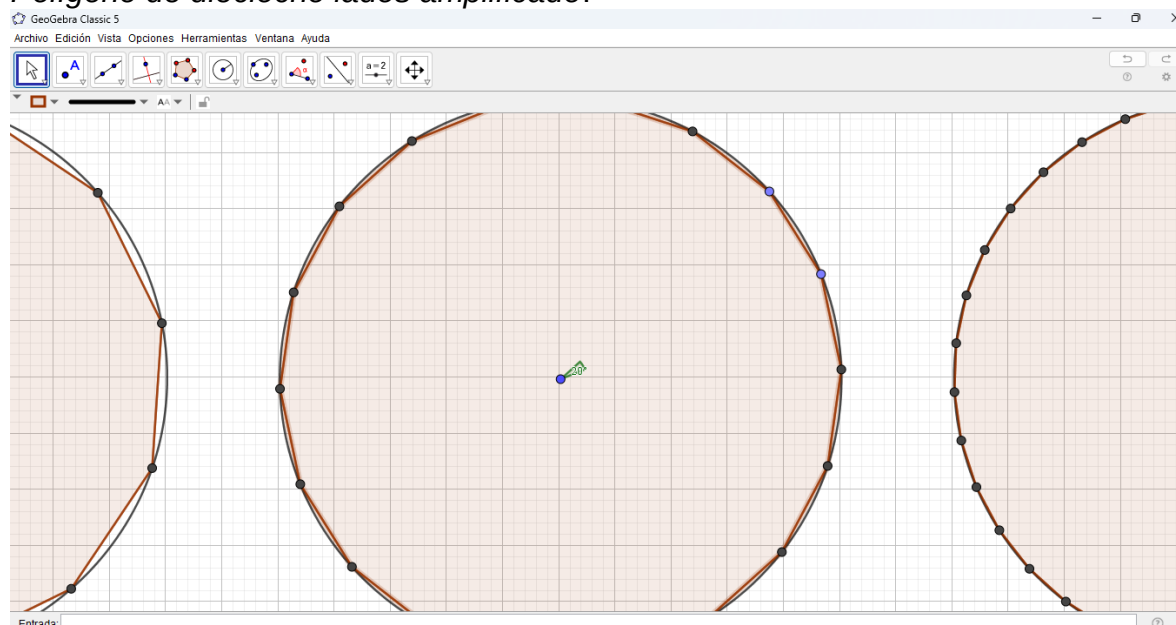
D: ¿Qué opinan los demás?

E₂₀: Creo que todavía le va a faltar.

En la Figura 2, se muestra una ampliación del polígono de dieciocho lados, tal y como se mostró al grupo de estudiantes con el propósito de que pudieran apreciar que este polígono tampoco cubría toda la superficie del círculo.

De manera complementaria, se le explicó al estudiantado que la expresión simbólica que nos permite calcular el área de un círculo se obtiene a partir de la relación que se establece entre el cálculo del área de un polígono regular cualquiera y la medida de la circunferencia correspondiente.

Figura 2.
Polígono de dieciocho lados amplificado.



D: ¿Cómo se calcula el área de un polígono regular?

E₃₁: Me acuerdo que es multiplicando el perímetro por el radio y dividiendo entre dos.

E₁₂: No es el radio, es la apotema.

D: Bien, a esta expresión, también llamada fórmula, la vamos a designar con el número 1 entre paréntesis. Ahora, ¿cómo obtenemos el perímetro de la circunferencia?

E₁₂: Multiplicando el valor de pi por el diámetro.

D: ¿A cuántos radios equivale el perímetro?

E₂₃: El doble.

D: Bueno, pues lo vamos a representar con dos veces el radio, en lugar del diámetro y lo vamos a representar con el número dos entre paréntesis. Ahora, la pregunta es: ¿Cómo se relacionan entre sí las expresiones del área del polígono regular y el perímetro de la circunferencia?

El procedimiento algebraico que se llevó a cabo para deducir el área de un círculo, se muestra a continuación:

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \dots\dots(1)$$

$$P = 2\pi r \dots\dots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$A = \frac{(2\pi r)(r)}{2}$$

Realizando operaciones:

$$A = \frac{2\pi r^2}{2}$$

Simplificando términos o aplicando la propiedad cancelativa:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Para acceder a la comprensión del concepto de límite infinitesimal mediante el trabajo de límites laterales tanto por izquierda (de menor a mayor) como por derecha (de mayor a menor), se completaron tablas que se aproximanse a un valor numérico al que tiende la variable dependiente de una función lineal, se proporcionaban valores numéricos cercanos para la variable independiente (ver Figura 3).

Figura 3.
Ejemplo de tabla completada para una función lineal.

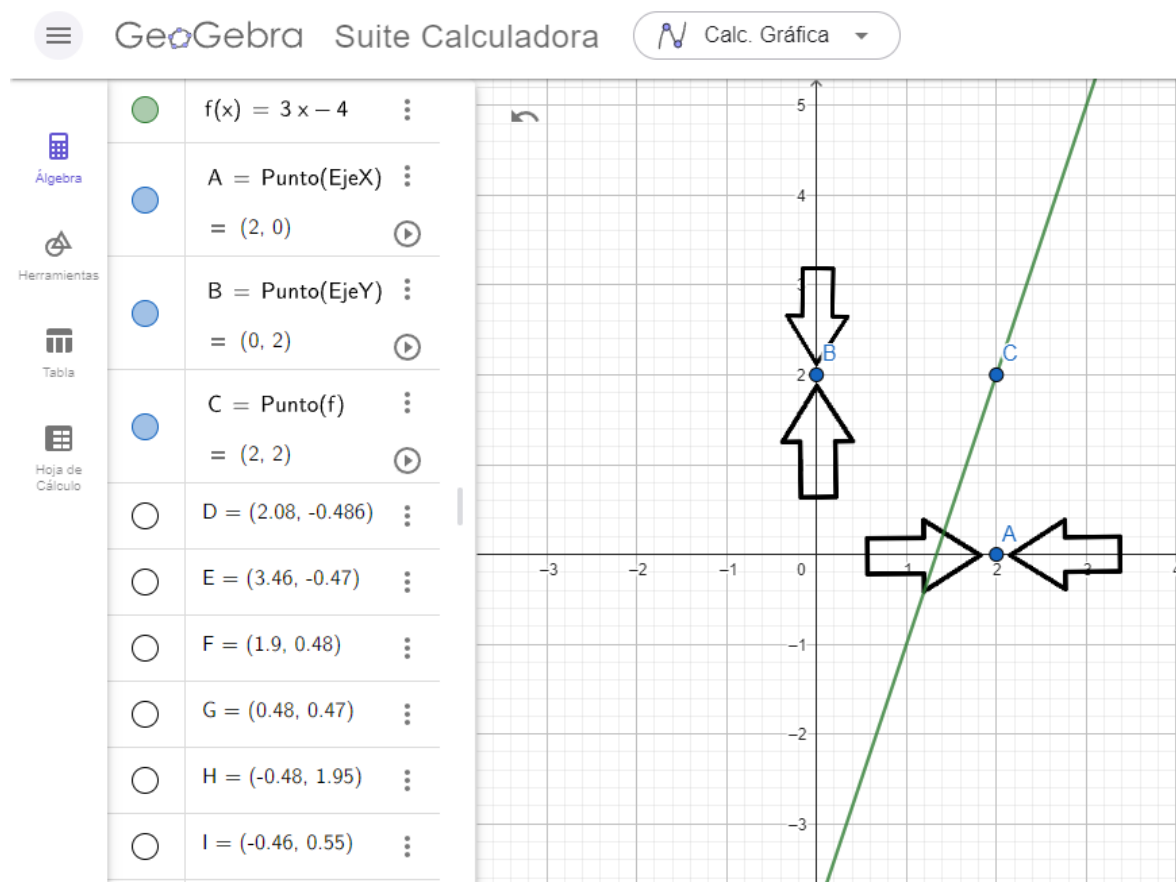
f(x) = 3x - 4		f(x) = 3x - 4	
x	f (x)	x	f (x)
1.5	0.5	2.5	3.5
1.7	1.1	2.3	2.9
1.9	1.8	2.1	2.3
1.95	1.85	2.05	2.15
1.99	1.97	2.01	2.03

↓	↓	↓	↓
2	2	2	2

De manera complementaria, se solicitó al estudiantado el trazado de la gráfica de los valores. En la Figura 4, se muestran los aspectos que se ponían de relevancia con el estudiantado.

Figura 4.

Representación algebraica y gráfica de la función lineal proporcionada mediante límites laterales por izquierda y por derecha.



La tercera actividad que interesa presentar es sobre el trabajo realizado con el concepto de límite infinito, ya que también se hizo en los tres niveles de representación: tabular, gráfica y algebraica. Previamente, ya se había trabajado con el cálculo de límites de forma directa.

D: Si queremos calcular el límite de la función $f(x)=1/x$ cuando el valor de la variable independiente tiende a cero, ¿qué debemos hacer? [En el pizarrón se escribió la representación formal del límite de esta función algebraica]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

E₁₀: Nos da cero.

D: ¿Por qué cero?

E₁₀: Porque se divide uno entre cero.

D: ¿Qué dicen los demás? [Nadie contesta]. Para que podamos interpretar el

resultado, vamos a completar las tablas siguientes.

Se les proyectaron las tablas mostradas en la Figura 6, con los valores sugeridos para la variable independiente y ellos calcularon los correspondientes a la variable dependiente.

Figura 5

Tablas con valores sugeridos para la variable independiente cuando tiende a cero.

x	f(x)		x	f(x)
- 4	- 0.25		4	0.25
- 2	- 0.5		2	0.5
- 1	- 1		1	1
- 0.5	- 2		0.5	2
- 0.25	- 4		0.25	4
- 0.1	- 10		0.1	10
- 0.01	- 100		0.01	100
- 0.001	- 1000		0.001	1000



0



- ∞



0



∞

D: Ahora que ya completaron las tablas, díganme, ¿qué ocurre a medida que los valores de la variable independiente se aproximan a cero.

E₈: Se hacen más grandes.

D: Si cada vez se hacen más grandes, ¿cómo podemos representar de manera general ese comportamiento de nuestros datos?

E₁₅: Con el infinito.

D: Vamos a trazar la gráfica en GeoGebra para que podamos visualizar el comportamiento de los datos numéricos.

En la Figura 6, se muestra el trabajo realizado en el software. Las flechas naranjas representan los valores a los que tiende o se aproxima la variable independiente que en este caso es a cero y las flechas azules los valores a los que se aproxima la variable dependiente que en este caso es infinito.

De manera similar, se procedió con la gráfica de la función inversa cuando el valor de la variable dependiente tiende a infinito. En la Figura 7, se muestran los valores que le correspondieron tanto a la variable independiente como a la variable dependiente.

Figura 6.

Representación gráfica de la función inversa cuando el valor de la variable independiente tiende a cero.

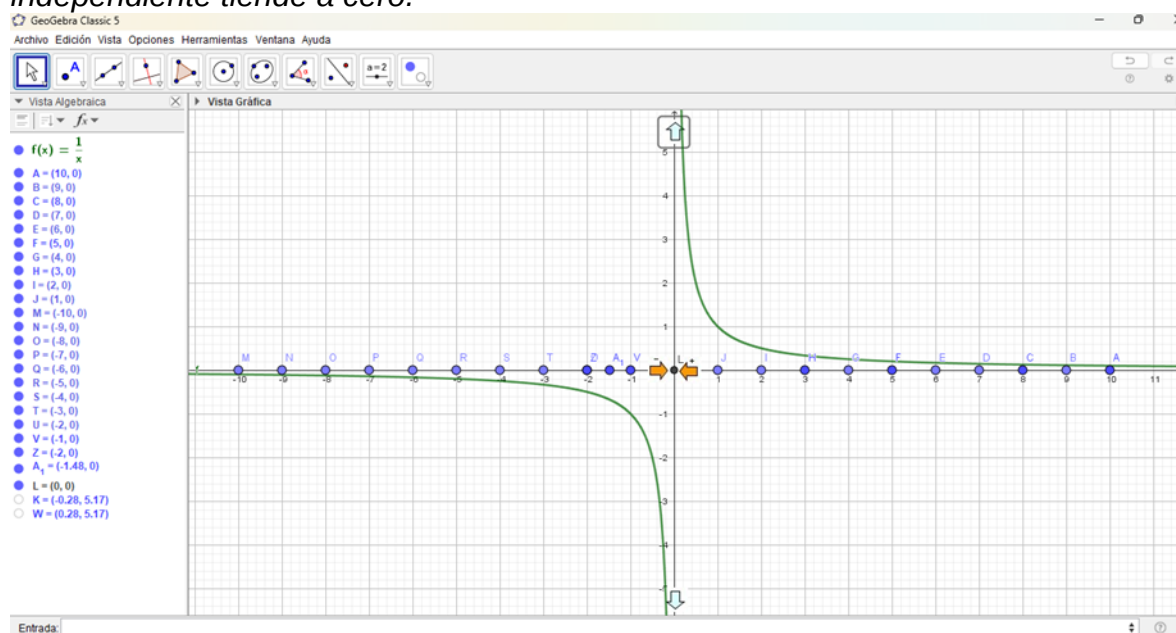


Figura 7

Valores asignados a la variable independiente cuando tiende a infinito.

x	f(x)		x	f(x)
- 0.25	- 4		0.25	4
- 0.5	- 2		0.5	2
- 1	- 1		1	1
- 2	- 0.5		2	0.5
- 4	- 0.25		4	0.25
- 10	- 0.1		10	0.1
- 100	- 0.01		100	0.01
- 1000	- 0.001		1000	0.001

↓

- ∞

↓

0

↓

0

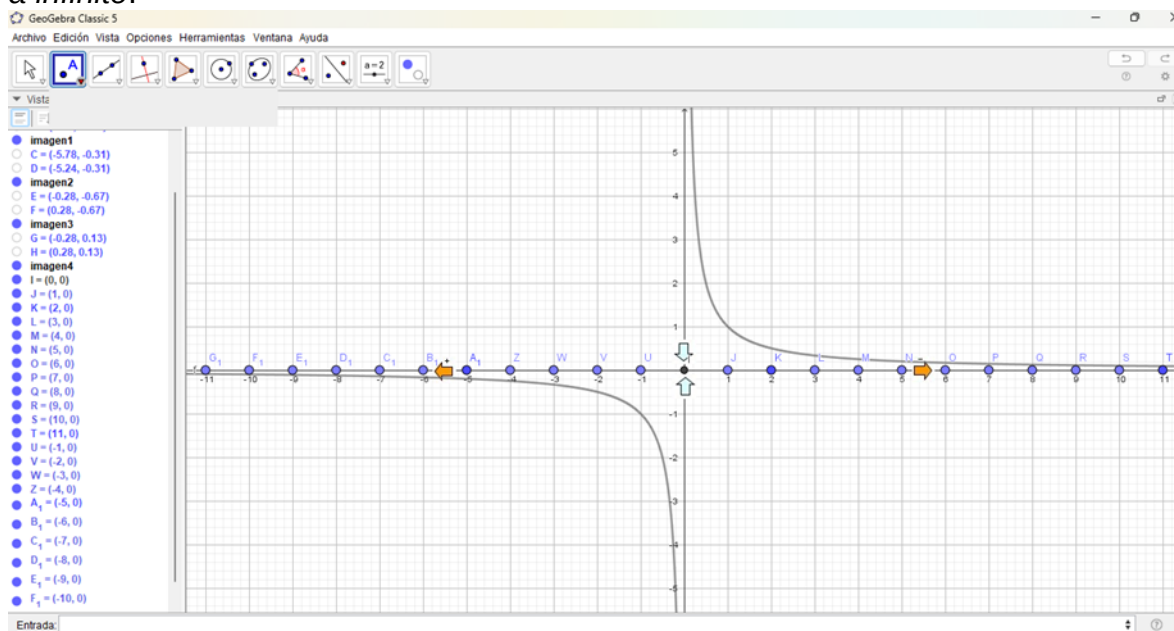
↓

∞

En la Figura 8, se muestra la gráfica correspondiente, en este caso también corresponde a una hipérbola, cuyas flechas naranjas indican los valores por izquierda y por derecha que se alejan hacia el infinito negativo y al infinito positivo, respectivamente.

Figura 8.

Gráfica de una función inversa cuando el valor de la variable independiente tiende a infinito.



D: Otro caso más complejo en el que se calcula el límite de una función algebraica cuando el valor de la variable independiente tiende a infinito, es el siguiente [En el pizarrón se mostró la expresión algebraica abajo mostrada]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2}{3x^2 + 5x} =$$

D: En este caso, también podríamos emplear las tablas que utilizamos en los ejemplos anteriores, pero sería un poco tardado, por lo que primero identificaremos el mayor valor de la variable independiente; díganme, ¿cuánto vale el mayor exponente?

E4: Dos.

D: Ah, pues vamos a dividir todos los términos entre equis al cuadrado y luego vamos a simplificar cada uno de los términos. [En el pizarrón se hizo la representación algebraica, tal y como se muestra abajo]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2}{3x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x}}$$

D: ¿Qué podemos hacer ahora que ya tenemos simplificado el cociente de estas

funciones? [Nadie contesta]. Lo que tenemos que hacer es sustituir el valor de infinito.

D: Ahora sí, díganme, ¿a cuánto equivalen los números que se dividen entre el infinito? [Nadie contesta]. Vean las tablas y las gráficas de lo que hicimos en los casos anteriores.

E₁₄: Es igual a cero.

D: ¿Y que nos queda?

E₁₄: Seis arriba y tres abajo. ¿Se dividen?

D: Sí, ¿Cuánto es el resultado?

E₁₄: Dos.

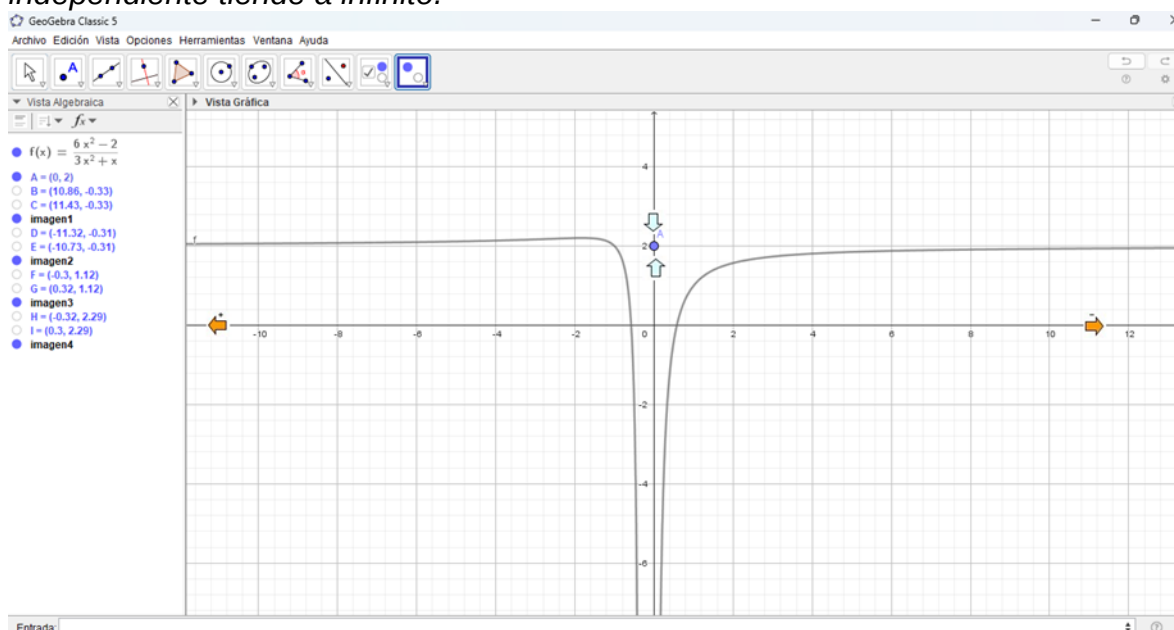
D: Tracen la gráfica en GeoGebra y cerciőrense del resultado. [En el pizarrón se mostró la representación algebraica respectiva].

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x}} = \frac{6 - \frac{2}{\infty^2}}{3 + \frac{5}{\infty}} = \frac{6 - 0}{3 + 0} = \frac{6}{3} = 2$$

En la Figura 9, se muestra la gráfica correspondiente.

Figura 9.

Gráfica del cociente de dos funciones algebraicas cuando el valor de la variable independiente tiende a infinito.



Para cerrar con este tema, se les pidió que realizarán el procedimiento de otros casos en los que el valor de infinito se aproximaba a infinito, de tal manera que pudieron identificar tres casos diferentes: el primero cuando el valor de la variable con mayor exponente se encuentra tanto en el dividendo como en el divisor; el segundo cuando el valor de la variable con mayor exponente se

encuentra en el dividendo y el tercero, cuando el mayor valor de la variable se encuentra en el divisor.

Con base en la interacción entre el docente y los estudiantes, pudieron advertir que, en el primer caso, el límite del cociente de las funciones siempre va a obtenerse como resultado un número real; mientras que, en el segundo, el límite del cociente de las funciones tiende a infinito y en el tercero, el límite del cociente de las funciones tiende a cero.

A modo de conclusiones

En un primer momento, el software de GeoGebra permitió desarrollar el concepto de límite de forma intuitiva, ya que, al ser utilizado para construir los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, les permitió el desarrollo de habilidades matemáticas básicas como la imaginación especial, visualización y la generalización de forma dinámica e interactiva.

En este sentido, la enseñanza mediada con el software de GeoGebra contribuyó para que el estudiantado pudiera identificar que, a mayor número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio constante, mayor aproximación al área del círculo.

De manera paralela, las distintas representaciones del concepto de límite también incidieron de manera favorable en la comprensión del estudiantado, ya que el tránsito entre las distintas formas de representación de los datos de la tabla a la gráfica y después, de la tabla a la expresión algebraica, permitieron que se pudiera abstraer el concepto de límite de manera gradual y sistemática.

Incluso, la conversión de la representación algebraica en tabla o gráfica también fue favorable para comprender el concepto de límite de una función algebraica; primero, con funciones simples y después, con el caso particular de un cociente de funciones algebraicas.

En suma, el uso de GeoGebra junto con el tratamiento y conversión de los distintos registros semióticos de la información, favorecieron la comprensión del grupo de estudiantes que participaron en esta investigación, puesto que transitaban del plano intuitivo al plano formal mediante situaciones y contextos diversos.

Aquí se reportan los resultados obtenidos para el caso del cálculo de límite de operaciones con funciones algebraicas cuando el valor de la variable independiente tiende a cero; no obstante, conviene señalar que el trabajo con este tema favoreció el trabajo con el límite de funciones algebraicas que no se pueden determinar de forma directa.

Referencias

- Astolfi, J. P. (1997). *El “error”, un medio para enseñar*. Díada.
- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la

- universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(2), 189-209. <https://www.clame.org.mx/relime/relime.htm>
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed). *Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201. Grupo editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. 9(1), 143-168.
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós.
- Gigerenzer, G. (2005). I Think, Therefore Err. *Social Research: An International Quarterly* 72 (1), 195 – 218. <https://www.jstor.org/stable/40972008>
- Heggen, P. y Kauchak, D. (2005). *Estrategias Docentes: Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. FCE.
- Rendón, C. G. (2017). Hitos en la Historia del concepto de límite. *II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. REDUMATE.
- Woods, P. (1997). *La escuela por dentro. La Etnografía en la Investigación Educativa*. Paidós.
- Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales Epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3): 413 – 450. <https://www.clame.org.mx/relime/relime.htm>