CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES COMUNES: EL CASO DE UN ESTUDIANTE EN FORMACIÓN DOCENTE

MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING COMMON FRACTIONS: THE CASE OF A STUDENT IN TEACHER TRAINING

Juan Francisco González Retana

1.- **Doctor en Investigación Educativa. Instituto Superior Ibérico. juanfranciscogonzalezretana@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-2956-9298**

Recibido: 29 de febrero de 2024
Aceptado: 09 de julio de 2024

Resumen

El conocimiento matemático de los profesores es uno de los elementos principales que influyen en su práctica de enseñanza, así como en el aprendizaje de los estudiantes con quienes trabajan. El artículo analiza el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que un estudiante para profesor de educación primaria pone en práctica al impartir clases sobre fracciones. Para ello se empleó el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) como referente teórico. Mediante una metodología de estudio de caso, se observaron, videograbaron y analizaron sesiones de clase del futuro docente, quien era estudiante del octavo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria. Los resultados indican que el futuro profesor demostró que posee conocimientos matemáticos que le permiten resolver problemas y ejercicios, propios de la educación primaria, en los que están implicadas las fracciones. Sin embargo, evidenció graves deficiencias en lo que a la enseñanza y el conocimiento de los estudiantes se refiere.

Palabras clave: conocimiento matemático para la enseñanza; conocimiento matemático del profesor; enseñanza de las matemáticas; formación matemática de profesores.

Abstract

Teachers' mathematical knowledge is one of the main elements that influence their teaching practice, as well as the learning of this subject by the students they work with. The article analyzes the Mathematical Knowledge for Teaching that a student for primary education teacher puts into practice when teaching about fractions. The Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) model was used as a theoretical reference. Using a case study methodology, class sessions of the future teacher, who was a student in the eighth semester of the Bachelor of Primary Education, were observed, videotaped and analyzed. The results indicate that the future teacher demonstrated that he has mathematical knowledge that allows him to solve problems and exercises, typical of primary education, in which fractions are involved. However, he showed serious deficiencies in terms of teaching and student knowledge.

Keywords: mathematical knowledge for teaching; mathematical knowledge of the teacher; teaching of mathematics; mathematical training of teachers.

Introducción

Las fracciones, como contenido educativo, son una dificultad para los estudiantes de educación básica en México. Al menos así lo demostraron los resultados de las últimas evaluaciones realizadas. Según resultados de la aplicación del Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (PLANEA, 2019) sólo el 5.1% de los estudiantes de educación primaria fueron capaces de resolver problemas que implicaron números fraccionarios.

No solo los estudiantes de educación básica presentan limitaciones para resolver problemas que involucran fracciones, diversas investigaciones (Arteaga-Martínez y Arnal-Palacián, 2022; Ceballos Londoño, 2023; González Retana y Eudave Muñoz, 2018; Herreros Torres et al., 2022; López-Martín et al., 2022; Meléndez-Cruz et al., 2022, 2023; Sie y Agyei, 2023; Tossavainen y Helenius, 2024; Williams Muller et al., 2020) mencionan que incluso profesores y los futuros profesores presentan estas dificultades.

Aunque investigaciones como la Valenzuela-Molina et al. (2021) muestran que el conocimiento de los futuros profesores ─relacionado con fracciones─ pasa por una etapa de transformación mientras cursan sus estudios. La transformación radica en diseñar, reformular e implementar tareas matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Investigaciones como la de Ceballos Londoño (2023) sobre la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones permiten identificar que:

a) Tanto, futuros docentes como profesores en servicio suelen tener dificultades con la conceptualización y la operación con fracciones. Dichas dificultades radican en las diversas representaciones de estos números, la conversión entre fracciones y números mixtos y el manejo de fracciones con denominadores diferentes.
b) Es necesario analizar cómo es el conocimiento matemático de los docentes en formación en lo que respecta al concepto de fracciones pues los profesores necesitan una comprensión sólida, así como de estrategias efectivas para enseñar el contenido.
c) Se destaca la relevancia de promover diferentes tipos de interpretaciones de las fracciones: como partes de un todo, como cociente, como medida, como relación, como una probabilidad, como porcentaje, como puntaje o como operadores.

Tossavainen y Helenius (2024) coinciden en que el conocimiento de los futuros docentes tiene graves deficiencias. Pues solo se reconocen las interpretaciones de fracciones como parte-todo y como cociente, mientras que interpretaciones como medida, operador, tasa y razón están completamente ausentes. Los hallazgos que presentan estos autores sugieren que es esencial mejorar la educación matemática de futuros docentes, enfocándose en desarrollar un entendimiento conceptual más profundo de las fracciones. Esto es crucial para evitar que los futuros maestros transmitan sus malentendidos a los estudiantes de primaria.

Por su parte López-Martín et al. (2022) apuntan que los futuros maestros poseen un conocimiento matemático previo débil relacionados con las fracciones, cuestión impacta negativamente en su conocimiento didáctico al respecto. Esta falta de conocimiento podría limitar su capacidad para enseñar de manera efectiva en el aula. De ahí que estos autores destaquen la necesidad de acciones preventivas, entre ellas el análisis de su práctica, en la formación de maestros para mejorar su comprensión matemática y didáctica.

Castro-Rodríguez y Rico (2021) analizan el conocimiento para la enseñanza y el aprendizaje de fracciones de futuros docentes. Entre sus hallazgos distinguen que el conocimiento de los futuros profesores es más conceptual en donde se pone manifiesto una compresión funcional de las fracciones. Si se considera que el profesor es un elemento importante en el aprendizaje de los alumnos el análisis de los conocimientos que posee resulta importante. Con regularidad se deja por sentado que quien ingresa a una institución para formarse como profesor de educación primaria cuenta con los conocimientos matemáticos suficientes.

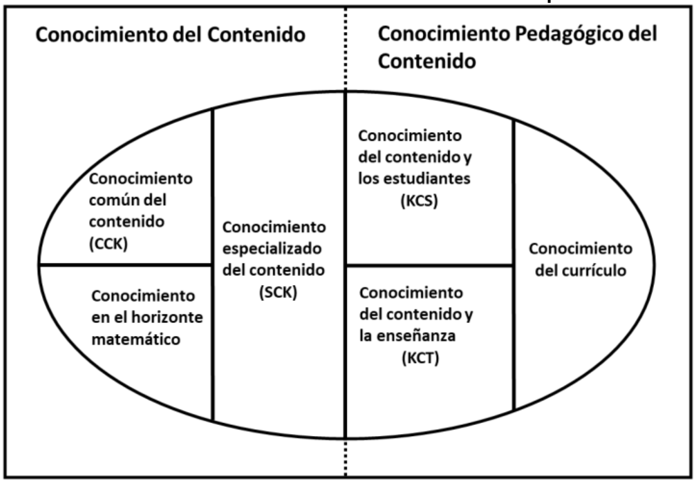
La presente investigación intenta responder a la pregunta ¿Cuál es el conocimiento matemático para la enseñanza que un estudiante para profesor de educación primaria pone en práctica al impartir clases sobre fracciones? Esta pregunta permite centrarse en la manifestación y aplicación del conocimiento matemático específico para la enseñanza de fracciones por parte de los futuros profesores. En tal sentido tiene como objetivo analizar el conocimiento matemático para la enseñanza que un estudiante para profesor de educación primaria pone en práctica al impartir clases sobre fracciones.

Se analiza el conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones entre otras razones, a causa de los resultados que obtienen los alumnos de primaria en las distintas evaluaciones, por el valor que este tipo de números tienen en sí mismos y debido a sus aplicaciones en otros contenidos matemáticos, pero, sobre todo, por la importancia que en esto tiene la participación del profesor.

Marco teórico

Para analizar el conocimiento matemático para enseñar fracciones del futuro profesor, se emplea el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés) Hill, Schilling, Ball, 2004; Hill, Rowan, Ball, 2005; Hill; Ball; Schilling, 2008). El MKT es el conocimiento matemático, las habilidades y hábitos mentales necesarios para enseñar. Involucra actividades, tareas, acciones y responsabilidades de los profesores para enseñar las matemáticas, tanto dentro y fuera del aula (Ball et al., 2006). Se conforma por dos tipos de conocimientos: el *Conocimiento del Contenido Matemático* y el *Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático* (Ball, 2005) (ver figura 1).

Figura 1*.*
Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza



Nota. Tomado de (Hill et al., 2008, p. 377)

El *Conocimiento del Contenido* es el que tiene cualquier persona que se dedica a la enseñanza de las matemáticas. Es, tanto su paso por la escuela básica, como su formación docente lo que contribuye a la adquisición de este conocimiento. Se compone de tres subdominios (Ball et al., 2008): a) *Conocimiento Común del Contenido* b) *Conocimiento Especializado del Contenido,* y c) *Conocimiento en el Horizonte Matemático.*

El *Conocimiento Común de Contenido* (CCK) es el conocimiento matemático que tienen personas que no se decidan a enseñar. En el caso de los profesores conjunta conocimientos y las habilidades para resolver los problemas y ejercicios del nivel educativo donde ejerce la docencia. Según Hill et al. (2008) es empleado no solo en la enseñanza de las matemáticas sino en una variedad de entornos.

El *Conocimiento Especializado del Contenido* (SKC) se compone de capacidades y habilidades de los profesores para su trabajo en el área de matemáticas; normalmente no se necesita para fines distintos a la enseñanza. Conlleva hacer visibles y aprendibles las características un tema en particular. Es un tipo de conocimiento que todo profesor que enseñe matemáticas debe poseer. Hill et al. (2008) señalan que el SKC implica que el profesor sepa las razones por las que funcionan ciertos procedimientos matemáticos. Es un conocimiento que se emplea de manera exclusiva en la enseñanza de las matemáticas y que no es empleado ni necesario e incluso deseable por cualquier otra persona que no se dedique a ello.

El *Conocimiento en el Horizonte Matemático* permite establecer relaciones entre contenidos de diferente complejidad y dificultad. Fernández y Figueiras (2010) mencionan que “un maestro […] tiene que saber con qué dificultades se enfrentarán sus estudiantes para sentar una base conceptual firme” (p. 294), esta base deberá servir para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos del mismo grado quizá de otro nivel educativo.

En el *Conocimiento Pedagógico del Contenido* (PCK) se encuentran los conocimientos y habilidades necesarios para el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se compone de: a) El *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes*; b) *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza*, y; c) *Conocimiento del Currículo (CC).*

El *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes* (KCS) engloba conocer a los estudiantes y lo que saben de matemáticas. Hill et al., (2008) indican que se centra en el conocimiento de cómo los estudiantes piensan y aprenden. Un profesor debe tener la capacidad para anticipar lo que sus estudiantes pueden pensar y lo que quizá encontrarán confuso para contemplar posibles alternativas en su enseñanza.

El *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (KCT) implica conocer diversas maneras de abordar un contenido matemático. Saber las ventajas de utilizar determinada estrategia didáctica para enseñar un contenido matemático en particular. El profesor debe tener el conocimiento para decidir cómo comenzar el estudio de un tema, cuáles estrategias emplear, qué aportaciones de los alumnos tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente (Ball et al., 2008).

El *Conocimiento del Currículo* considera que un profesor tiene conocimiento de la composición y estructura del plan y los programas de estudio de matemáticas, independientemente del grado o nivel escolar donde se desempeñe. Lo que le permite la planificación de las actividades para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes (Ball et al., 2008).

Metodología

Se trata de una investigación con un enfoque cualitativo en la que se empleó el método del estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999). Un estudio de caso instrumental examina un caso en particular, no para generalizar sobre él, sino con el objetivo de comprender un fenómeno y poder profundizar en su aprehensión. Se seleccionó a un estudiante quien se identifica con el seudónimo de Gabriel, a quien se eligió en función de los siguientes criterios: (1) que estuviera próximo a terminar la Licenciatura en Educación Primaria, este estudiante cursaba el 7° semestre; (2) que estuviera realizando jornadas de práctica docente intensivas, Gabriel realizaba sus prácticas profesionales en un grupo de 4° grado de primaria por un periodo de ocho meses continuos; (3) que basara su enseñanza en el plan de estudios vigente; (4) que los resultados que obtuvo en dos pruebas[1], una sobre sus conocimientos matemáticos sobre fracciones y decimales fuera alto, en la que obtuvo 29 aciertos de 30 reactivos propuestos; y (5) que sus resultados en una prueba sobre conocimientos didácticos para enseñar fracciones y decimales fuera alto, obtuvo 17 aciertos de 17 que la integran.

La elección del participante se concretó en mutuo acuerdo con él, con el profesor titular del grupo, el director de la escuela primaria y la docente quien coordinaba las jornadas de práctica que realizaba Gabriel. El grupo que atendía Gabriel estaba conformado por 20 estudiantes entre los 9 y 10 años. La

[1] Dichas pruebas forman parte de una investigación más amplia en González Retana (2018)

recolección de información se realizó en una escuela primaria ubicada en la zona centro de una ciudad ubicada en el norte de México. Dicha escuela contaba con doce grupos, dos por grado escolar cada uno de ellos tenía entre 20 y 25 alumnos.

Se observaron[1] y videograbaron cinco sesiones de clase, en las que se trató de no interrumpir la dinámica natural y habitual de las actividades en el aula (Moug, 2007) con duración promedio de una hora cada una de ellas. Durante las sesiones Gabriel abordó los contenidos:

1. Uso de fracciones para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.
2. Uso de las fracciones para expresar partes de una colección.
3. Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras).
4. Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos.

Para cuidar el criterio de credibilidad se recurrió a lo que Neuman (2014) denomina como auditoría externa. Esto es, la tuvo la revisión de un investigador externo para la revisión de la transcripción que se realizó de las videograbaciones de cada sesión; la revisión incluyó el proceso de codificación, categorización y redacción de hallazgos propio de la investigación cualitativa.

Resultados y discusión

Para el análisis de las sesiones observadas se consideraron los subdominios que integran el Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Hill et al., 2008) así como los indicadores propuestos por Sosa (2011). Durante las clases Gabriel evidenció contar con conocimientos, en diferentes niveles de desarrollo y compresión, que se relacionan con los subdominios del MKT. A continuación, se describen rasgos de cada uno de ellos.

Conocimiento común del contenido

Gabriel abordó el contenido de “Resolución, con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos” (SEP, 2011b, p. 76). Al inicio de la clase propuso la resolución de un algoritmo de suma que contenía dos sumandos[2]. Por la forma en que lo explica se puede confirmar que posee el conocimiento para resolver un algoritmo como éste.

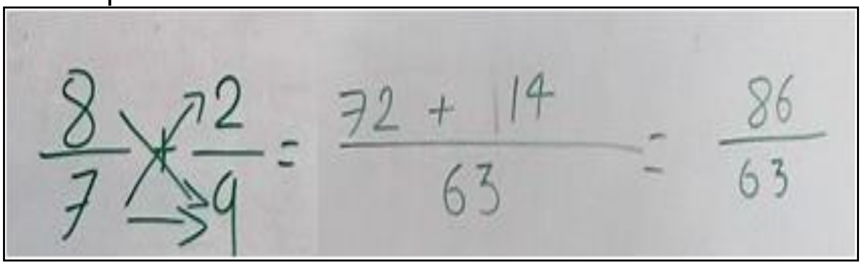
---

[1] Para realizar la observación se empleó una guía de observación semiestructurada que se construyó a partir de los subdominios que integran el Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza.

[2] Al margen de los conocimientos didácticos que Gabriel manifiesta, y de la secuencia didáctica que emplea, el ejemplo se presenta con la intención de hacer explícito el *Conocimiento Común del Contenido* acerca de la suma de fracciones.

Gabriel: *Voy a explicarlo primero: si quiero sumar* $\frac{8}{7}+\frac{2}{9}$ *¿cómo le haríamos?*
(Mireya)[1]***:*** *Tenemos que multiplicarlo.*
Gabriel: *¿Cómo?*
(Mireya): *El número de arriba…*
Gabriel: *¿Sale? Primero multiplicamos este* [señala el número 7] *¿7 x 9? Grábense el orden. ¿7 x 9?* [Se refiere a los denominadores de las fracciones a sumar]
(Mireya): *63*
Gabriel: *7 x 9, 63 ¿verdad?*
Gabriel: [Señala otros dos números] *Ahora 8 x 9*
(Mireya): *72*
Gabriel: *72 ¿verdad? Fíjense, 7 x 9… 63 y luego 8 x 9. Lo crucé ¿verdad? 72. Y luego ¿qué es lo que estamos haciendo?*

Figura 2.
Procedimiento para resolver una suma de fracciones escrito por Gabriel



(Ricardo)*: suma*
Gabriel*:* [Escribe el signo +] *Y luego 7 x 2*
(Ricardo)*: 14*
Gabriel*: 14. Ahora, fíjense, vamos a pasar esto ¿qué nos da? 63* [Se refiere al resultado de multiplicar los denominadores]. *Y ¿72 + 14?*
(Manuel): *86*
Gabriel: *¿Sale? Entonces éste* [señala la fracción $\frac{86}{63}$] *es el resultado de* $\frac{7}{8}+\frac{2}{9}$.

(Gabriel, clase 5, líneas 30-55[2])

Al analizar este fragmento es posible observar que Gabriel fue capaz de usar notación matemática para resolver una suma de dos fracciones propias. Demostró conocer el método de “productos cruzados” que lo llevó a encontrar

---

[1] Los nombres que aparecen entre paréntesis corresponden a estudiantes.

[2] La información entre paréntesis se refiere a la organización de los datos para su tratamiento nombre del participante (Gabriel), clase que se analiza (3) y líneas de la transcripción donde se encuentra el fragmento que se presenta (30-55), esto con el contexto del software Atlas.ti.

la solución. El procedimiento seguido implica multiplicar denominadores y numeradores: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ab+bc}{bd}$.

Conocimiento especializado del contenido

Con relación a este subdominio Gabriel evidenció ser capaz de identificar conceptos, propiedades o reglas que están tras una respuesta de los estudiantes, lo que le permitió justificar el pensamiento matemático que utilizó uno de sus alumnos. En una de las sesiones Gabriel identificó la propiedad de equivalencia de las fracciones que empleó un estudiante:

[Gabriel juega con los alumnos dominó de fracciones.]

Gabriel: *Dale.* $\frac{2}{6}$ *o* $\frac{1}{2}$. [Se dirige a un estudiante] *¿No? ¿Pasas?*

[Abraham coloca en el extremo donde está $\frac{1}{2}$ una ficha que contiene la fracción $\frac{3}{6}$]

Gabriel: *Esos son…* [afirmando] *ándale, exacto.*

(Carlos): *¡Achis! ¿Por qué?*

Gabriel: *Porque son* $\frac{3}{6}$*, y* $\frac{3}{6}$ *es igual a* $\frac{1}{2}$.

(Gabriel, clase 3, líneas 311-316)

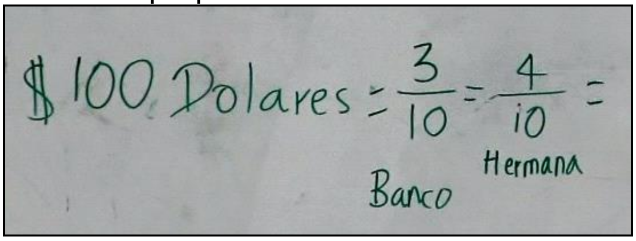
Gabriel identificó el pensamiento que siguió el alumno para colocar una fracción equivalente a la que se solicitaba. En términos matemáticos Gabriel utilizó la propiedad de equivalencia de dos fracciones ($\frac{m}{n} \doteq \frac{p}{q}$ si y solamente si $mq = np$).

Sin embargo, la justificación que proporcionó a Carlos, el alumno que pregunta no fue la más clara, tal vez pudo aprovechar para hacer una explicación al grupo sobre las fracciones equivalentes ($\frac{2}{4}$ por ejemplo) y con ello ampliar las posibilidades para colocar otras fracciones en cada turno de los alumnos durante el juego.

Un rasgo que caracteriza a este subdominio, y que parece Gabriel no había desarrollado, es el conocimiento de los procedimientos y cálculos que están tras las respuestas de los estudiantes. Durante el estudio del contenido: "uso de las fracciones para expresar partes de una colección" les propone el siguiente problema:

[Tengo 100 dólares. Y voy a pagar $\frac{3}{10}$ de esos 100 dólares al banco. Además, voy a pagar otros $\frac{4}{10}$ a mi hermana que me prestó. ¿Cuánto dinero me queda a mí?]

Figura 3.
Problema propuesto en la sesión 2



***Gabriel**: A ver ¿ya resolviste cuántos dólares le vamos a pagar al banco?* [pregunta a uno de los alumnos] *y ¿cuántos a…?*

Una alumna, Mariana, se acercó a la solución haciendo cálculos mentalmente, le externa su resultado a Gabriel y él le pregunta cómo la obtuvo. La alumna se confundió y no pudo explicarlo. Gabriel no le puso más atención ni retomó la aproximación de Mariana:

***Gabriel**: ... Si tengo $100 y le tengo que pagar* $\frac{3}{10}$ *al banco ¿Cuántos dólares le vamos a pagar al banco? Primero ¿cómo le hacemos?*
***(Mariana)**: 100 le vamos a pagar de los 100, 30.*
***Gabriel**: ¿$30? ¿cómo le hiciste?*
***(Mariana)**: Porque ahorita le puse un cero y otro 0*

(Gabriel, clase 2, líneas 75-83)

La respuesta de Mariana implicó agregar a la fracción $\frac{3}{10}$ un cero tanto al numerador como al denominador y con ello deduce que son 30 dólares de 100, lo que pagarán al banco. Se puede decir que recurrió a fracciones equivalentes ($\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$). También se puede interpretar que la respuesta de Mariana se corresponde con la interpretación de las fracciones como razón, particularmente, en su uso como porcentajes, donde se establece una relación entre un número y 100. Mariana pudo inferir que 100 dólares representaban el 100%.

Conocimiento en el horizonte matemático

De este subdominio fue difícil encontrar rasgos en el caso de Gabriel. No se presentaron, durante las observaciones situaciones que permitieran identificar elementos que caracterizan a este subdominio.

Conocimiento del contenido y los estudiantes

Se puede decir que el *Conocimiento del contenido y los estudiantes* de Gabriel fue limitado. Se pudo observar, con base en la manera de iniciar cada clase, la siguiente estructura:

1. Presentación del tema por parte del profesor
2. Realización ejercicios por parte de los alumnos, y

3. Revisión y corrección del trabajo de los alumnos por parte del profesor.

Durante las actividades los alumnos desempeñaron un papel pasivo. Se centraron en resolver ejercicios que Gabriel les propuso. La idea de un alumno pasivo que sólo recibe información por parte del docente rompe con la propuesta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas. Las sugerencias didácticas para el aprendizaje de las matemáticas se basan en despertar el interés de los estudiantes, invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y sobre todo a formular argumentos mediante los cuales validen sus resultados. Conviene comentar que en los programas de estudio de la educación primaria en México se carece de elementos que hagan explícito el enfoque didáctico.

En la clase donde Gabriel estudio el contenido: “uso de las fracciones para expresar partes de una colección” comenzó la sesión pidiendo a los alumnos que escribieran el enunciado: “Calcular la fracción de un número” como título y les dictó:

Gabriel: *“Para calcular la fracción de un número dividimos la cantidad entre el denominador y el resultado se multiplica por el numerador, ¿le entendieron?*
(Alumnos): *Noooo*
Gabriel: *Por ejemplo,* [Escribe en el pizarrón] *Tenemos* $\frac{2}{5}$*, si tenemos 50 manzanas y sólo voy a tomar* $\frac{2}{5}$ *¿Cómo se le va a hacer? Dividimos la cantidad entre el denominador y se multiplica por el denominador ¿Cuánto es?*
(Alumnos): *¿25? ¿10? ¿2?*
Gabriel: *A ver 50 entre ¿cuánto?*
(Alumnos): *Entre dos… dos quintos.*
Gabriel: *¿Porque 2?* [Haciendo una mueca de fastidio] *¡Entre dos no!*
(Alumnos): *35 manzanas*
Gabriel: *No* [enojado]*, me van a copiar estas definiciones. Entre más batallen más les voy a poner. Escriban: “Para calcular la fracción, de un número dividimos la cantidad entre el denominador y su resultado se multiplica por el numerador”.*

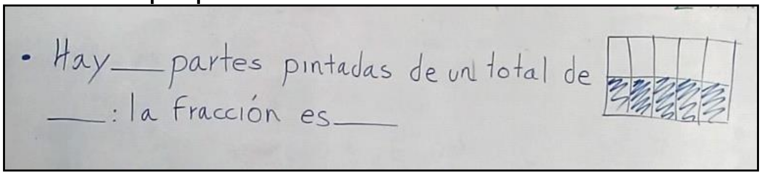
(Gabriel, clase 2, líneas 27-35).

En fragmento se evidencia que Gabriel no demuestra rasgos del subdominio del conocimiento de los estudiantes. Parece no conocer las dificultades de los alumnos acerca del contenido matemático que pretende estudiar. Sugiere no haber previsto que los alumnos no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.

Conocimiento del contenido y la enseñanza

Gabriel intenta emplear algunos dibujos durante el estudio del contenido "Uso de las fracciones para expresar partes de una colección". Aunque, como se observa en el fragmento, son parte de un estilo de enseñanza centrado más en la realización de ejercicios:

Figura 4.
Problema propuesto al inicio de la sesión 4

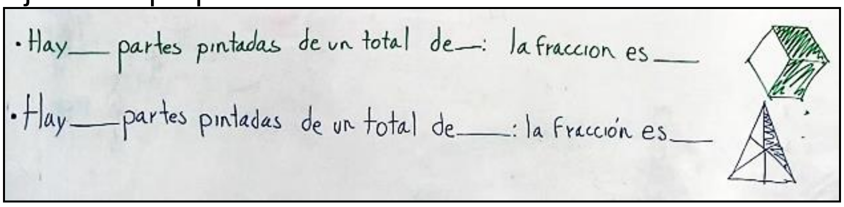


Gabriel: *A ver copian esa para escribir otra, ahorita contestamos todas, ¿sale? También copian el dibujo.*
(Mario): *De ese son cinco décimos*
Gabriel: *Muy bien*

(Gabriel, clase 4, líneas 44-53)

El enunciado que Gabriel propone requiere del apoyo de la figura para responderse de manera correcta. Es un ejercicio que resulta relativamente fácil para los alumnos de cuarto grado. Gabriel decidió incluir otros ejercicios más, en los cuales se incrementó la dificultad.

Figura 4.
Ejercicios propuestos en la sesión 4



(Leyla): *Profe ¿verdad que la fracción es lo que está coloreado? Por ejemplo* $\frac{5}{10}$.
Gabriel: *Exacto*.

(Gabriel, clase 4, líneas 96-99)

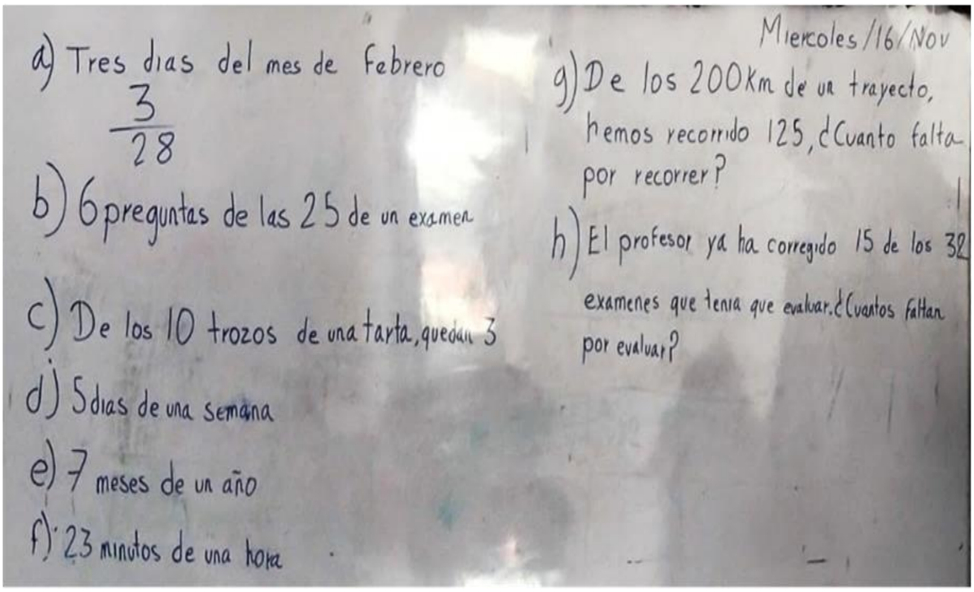
La intención de Gabriel es que por medio de las figuras los alumnos logren completar los enunciados que, desde su perspectiva, no implica más que contar el número de partes en que están divididas las figuras (obtener el denominador) y luego contar cuántas de esas partes están coloreadas (para obtener el numerador) y con ello completar los enunciados. Sin embargo, en este ejercicio, aparentemente fácil para los alumnos, Gabriel revela su falta de conocimiento sobre la representación de fracciones por medio de figuras planas. Primero, porque las figuras parecieran representar más bien sólidos.

Segundo, porque aun si se consideran como figuras planas, no están divididas en partes iguales. A esto Fandiño (2009) lo categoriza como uno de los errores más frecuentes en el aprendizaje de fracciones y lo llama “problemas en el reconocimiento de esquemas”. Un problema en el reconocimiento de esquemas ocurre cuando se intenta fraccionar una figura en determinado número de partes y estas no resultan iguales en área. Por lo que se habla de una figura dividida en *tantas partes* y no de una figura *dividida en tercios, cuartos, quintos, etc.*

Conocimiento del currículo

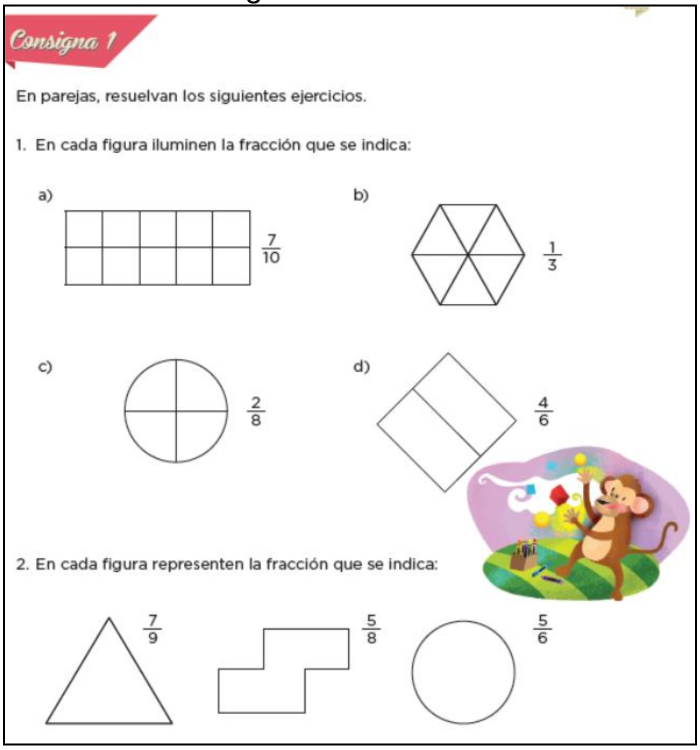
El *Conocimiento del currículo* radica en saber que contenidos conforman el programa de estudio y la manera en que están organizados. Gabriel mostró tener problemas para establecer una relación entre las actividades que propuso y las lecciones del libro que solicitó que sus alumnos resolvieran. En una sesión Gabriel pidió que copiaran los enunciados que aparecen en la figura 5.

Figura 5*.*
Ejercicios de la sesión 1



La intención fue que los alumnos escribieran la fracción que se forma dado un total (en ocasiones no explícito) y las partes que se “toman” de él. Cuando varios alumnos terminaron el ejercicio Gabriel les solicitó que realizaran las actividades de la lección 29 (figura 6) del libro de matemáticas. En dicha lección, aunque se abordan fracciones, se centran más en la representación gráfica que en la escritura de estas. Lo cual da la idea de que existe una confusión en el conocimiento de los temas que se proponen en los libros o que Gabriel no logró establecer la conexión entre ambas actividades.

Figura 6.
Desafío 29, Partes de un todo. Primaria. Cuarto grado.



El propósito de la lección se centra en que los alumnos usen la noción de equivalencia de fracciones al tener que representarlas gráficamente en figuras planas. Dicha noción, aunque corresponde a otro bloque, no había sido mencionada ni empleada en actividades anteriores.

Conclusiones

El *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* que evidenció Gabriel se relaciona más con el *Conocimiento del Contenido Matemático* que con el *Conocimiento Pedagógico del Contenido*, con mayor énfasis en el subdominio *Conocimiento común del contenido* de las fracciones y los decimales. Se puede decir que cuenta con un *Conocimiento común del contenido* suficiente, que le permiten resolver problemas y ejercicios en los que están implicadas las fracciones.

Con relación al *Conocimiento especializado del contenido,* Gabriel mostró algunas deficiencias, pues, aunque logró identificar la manera en que razona un alumno al colocar una fracción equivalente, no fue capaz de aprovechar tal situación para ampliar la información a los demás alumnos del grupo. En otras palabras, de conocer aspectos matemáticos que son importantes para la enseñanza de un tema en particular. Lo anterior se puede relacionar con el *Conocimiento en el horizonte matemático*, pues un profesor debe contar con los conocimientos necesarios para vincular el contenido que se estudia con otros sean correspondientes al grado escolar donde trabaja o incluso con los de otro nivel educativo.

Las deficiencias más graves se observaron en los subdominios relacionados con la enseñanza y el conocimiento de los estudiantes. Fue muy notable que Gabriel casi nunca consideró los razonamientos e intereses de los alumnos. Por el contrario, se limitó a ofrecer explicaciones y solicitar a los alumnos que copiaran y realizaran ejercicios que escribió en el pizarrón.

Además, los ejercicios que propuso no estuvieron cercanos al contexto de los alumnos, muchas veces los ejemplos que empleó resultaron difíciles de comprender y sobre todo de representar. Por ejemplo, cuando comenzó la clase con una definición: *"Para calcular la fracción de un número dividimos la cantidad entre el denominador y el resultado se multiplica por el numerador.* Si esto se compara con el *Conocimiento común del contenido* que posee ─porque es evidente que él sí comprende dicha definición─ queda claro que no basta con el conocimiento matemático, sino que éste debe estar ligado a uno didáctico que permita el diseño de estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje.

Con base en el Modelo del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), en el caso de Gabriel se nota una disociación entre los subdominios que lo conforman. Pues, aunque muestra un *Conocimiento Común del Contenido* revela deficiencias en otros subdominios de carácter didáctico.

Con relación al *Conocimiento del currículo* en Gabriel se observó que no logró establecer una relación entre las actividades que propuso y las actividades del libro de texto. Si esto se compara con los contenidos de los cursos de formación en matemáticas de la Licenciatura en Educación Primaria respecto al *Conocimiento del currículo* de educación primaria, se percibe una muy marcada discrepancia. Una de las competencias a desarrollar en los futuros docentes es que "relacionen los saberes aritméticos formales con los contenidos del plan y programas de estudio de educación primaria para diseñar ambientes de aprendizaje" (Secretaría de Educación Pública, 2013, p. 6), es claro que el conocimiento matemático para enseñanza de Gabriel está en desarrollo.

Referencias

Arteaga-Martínez, B., & Arnal-Palacián, M. (2022). Análisis del conocimiento especializado en matemáticas con maestros en formación: Una experiencia con la representación de fracciones. *Educatio Siglo XXI*, *40*(1), Article 1. https://doi.org/10.6018/educatio.436461

Ball, D. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241–247.

Ball, D. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education*.

http://www.erusd.k12.ca.us/projectalphaweb/index_files/MP/BallMathSummitFeb03.pdf
Ball, D. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. *American Educator*, *1*(1), 15–23.
Ball, D., Bass, H., Hill, H., Sleep, L., Phelps, G., & Thames, M. (2006). *Mathematics Teaching and Learning to Teach*. Learning Network Conference Teacher Quality, Quantity, and Diversity, Washintong, DC.
Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
Castro-Rodríguez, E., & Rico, L. (2021). Knowledge of preservice elementary teachers on fractions. *Uniciencia*, *35*(2), https://doi.org/10.15359/ru.35-2.10
Ceballos Londoño, J. (2023). Hacia una mejor comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones: Una revisión de la literatura. *Revista InveCom 3*(2). https://doi.org/10.5281/zenodo.8056291
Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Magisterio.
Fernández, S., & Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua—Funes. En M. M. Moreno, A. C. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 291–301). http://funes.uniandes.edu.co/1696/
González, J. (2018). *Conocimiento matemático y didáctico del estudiante para profesor de educación primaria sobre fracciones y decimales* [Universidad Autónoma de Aguascalientes]. http://bdigital.dgse.uaa.mx:8080/xmlui/handle/11317/1527
González, J., & Eudave, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática*, *30*(2), 106–139. https://doi.org/10.24844/EM3002.05
Herreros, D., Sanz, M., Ferragud, C., Torres, D., Sanz, M., & Gómez, C. (2022). La fracción como operador: Resolución de problemas, dificultades asociadas y conocimiento didáctico del contenido. *FPIEM: Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, *14*, 87–101.
Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers’ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.
Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers’ Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371
Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measure of teachers Mathematics Knowledge for Teaching. *The elementary School Journal*, *105*. https://www.google.com.mx/?gws_rd=ssl#q=Hill%2C+Ball+y+Schilling+(2008)

López-Martín, M., Aguayo-Arriagada, G., & García, M. (2022). Preservice Elementary Teachers' Mathematical Knowledge on Fractions as Operator in Word Problems. *Mathematics*, *10*(3), Article 3. https://doi.org/10.3390/math10030423

Meléndez-Cruz, J. A., Flores, E., & Juárez, E. de L. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de fracciones empleando recursos materiales y virtuales: Un estudio de caso. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *112*, 83–97.

Meléndez-Cruz, J., Flores-Medrano, E., & Hernández-Rebollar, A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones. *Uniciencia*, *37*(1), Article 1. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.11

Moug, P. (2007). Non-participative Observation in Political Research: The 'Poor' Relation? *Politics*, *27*(2), 108–114. https://doi.org/10.1111/j.1467-9256.2007.00286.x

Neuman, W. L. (2014). *Social Research Methods: Qualitative and Quantitative Approaches* (Vol. 30).

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Cuarto grado*. Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Aritmética, su aprendizaje y enseñanza*. SEP.

Sie, C., & Agyei, D. (2023). Relationship between pre-service teachers' mathematical knowledge for teaching fractions and their teaching practices: What is the role of teacher anxiety? *Contemporary Mathematics and Science Education*, *4*(2), https://doi.org/10.30935/conmaths/13252

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: Un estudio de dos casos.* [Tesis de Doctorado]. Universidad de Huelva.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Tossavainen, A., & Helenius, O. (2024). Student Teachers' Conceptions of Fractions: A Framework for the Analysis of Different Aspects of Fractions. *Mathematics Teacher Education and Development*, *26*(1). https://eric.ed.gov/?id=EJ1415729

Valenzuela-Molina, M., Ramos, E., & Flores, P. (2021). Transformation of the Specialized Knowledge of Future Primary Teachers on Fraction Division. *Acta Scientiae*, *23*, 218–240. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5650

Williams, E., Melo, L., Caballero, A., & Soto A., L. (2020). Dominio y concepciones sobre las fracciones de estudiantes para maestro de Educación Primaria: Un estudio comparativo entre España y Nicaragua. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas*, *3*(1), Article 1. https://doi.org/10.5377/recsp.v3i1.9790